Приложение 2 к РПД
Избранные главы методики обучения
математическому анализу
44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки)
направленность (профили)
Математика. Физика
Форма обучения – очная
Год набора – 2022

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

1. Общие сведения

1.	Кафедра	Математики, физики и информационных технологий
2.	Направление подготовки	44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
3.	Направленность (профили)	Математика. Физика
4.	Дисциплина (модуль)	Б1.В.01.ДВ.02.02 Избранные главы методики обучения математическому анализу
5.	Форма обучения	очная
6.	Год набора	2022

2. Перечень компетенций

ПК-1: Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач

3. Критерии и показатели оценивания компетенций на различных этапах их формирования

<table>
<tr><th rowspan="2">Этап формирования компетенции (разделы, темы дисциплины)</th><th rowspan="2">Формируемая компетенция</th><th colspan="3">Критерии и показатели оценивания компетенций</th><th rowspan="2">Формы контроля сформированности компетенций</th></tr>
<tr><th>Знать:</th><th>Уметь:</th><th>Владеть:</th></tr>
<tr><td>Теорема Лагранжа. Применение теоремы Лагранжа к доказательству неравенств и доказательству тождеств</td><td>ПК-1</td><td rowspan="4">– теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа;
– следствия из теорем Ферма, Ролля, Лагранжа;
– методы решения основных типов задач (доказательства неравенств и тождеств, решения уравнений, вычисление сумм, разложение выражений на множители, решение различных экстремальных задач)</td><td rowspan="4">– решать основные типы задач на доказательства неравенств и тождеств;
– решать основные типы задач на вычисление сумм;
– решать основные типы задач на разложение выражений на множители;
– решать различные экстремальные задачи</td><td rowspan="4">– основными методами решения школьных математических задач;
– математическим аппаратом, необходимым при решении указанных задач</td><td rowspan="4">Активность на практических занятиях

Выполнение домашних заданий

Выполнение индивидуального задания

Контрольная работа</td></tr>
<tr><td>Теорема Ролля. Нахождение кратных корней уравнения</td><td>ПК-1</td></tr>
<tr><td>Вычисление сумм. Разложение на множители</td><td>ПК-1</td></tr>
<tr><td>Экстремальные задачи. Приложения определенного интеграла</td><td>ПК-1</td></tr>
</table>

Шкала оценивания в рамках балльно-рейтинговой системы:

«неудовлетворительно» – 60 баллов и менее; «удовлетворительно» – 61-80 баллов; «хорошо» – 81-90 баллов; «отлично» – 91-100 баллов

4. Критерии и шкалы оценивания

4.1. Активность на практических занятиях

Процент правильных ответов	До 60	61-80	81-90	91-100
Количество баллов за активность на занятии	0,2	0,6	0,8	1

4.2. Выполнение домашнего задания

Процент правильных ответов	До 60	61-80	81-90	91-100
Количество баллов за выполненное домашнее задание	0,2	0,5	0,8	1

4.3. Выполнение индивидуального задания

Процент правильных ответов	До 60	61-80	81-90	91-100
Количество баллов за выполненное индивидуальное задание	5	10	15	20

4.4. Выполнение контрольной работы

Процент правильно решенных заданий	До 60	61-80	81-90	91-100
Количество баллов за выполнение контрольной работы	5	10	15	20

5. Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

5.1. Типовое домашнее задание

Задача. Вычислить: $\frac{1}{\pi}\left(\arcsin x-\arcsin\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)$, если $x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right]$.

Решение. Пусть $f(x)=\arcsin x-\arcsin\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}$. По условию $x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right]$. Можно проверить, что при этих значениях x функция f определена. Ее производная имеет смысл при $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right)$.

Действительно, $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-$

$$-\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2-\left(x^2-2x\sqrt{1-x^2}+1-x^2\right)}\cdot\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+2x\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2}\cdot\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|\cdot\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-$$

$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$, так как если $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right)$, то $\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|=x+\sqrt{1-x^2}$.

Значит, $f'(x)\equiv 0$ при $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right)$, откуда $f(x)\equiv C=const$ при $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right)$. Но $f(x)$ непрерывна при $x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right]$, следовательно, в силу замечания 3.2, $f(x)\equiv C=const$ при $x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right]$.

Найдем $C=f(0)=0-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}$, то есть $f(x)\equiv\frac{\pi}{4}$ при $x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right]$.

Таким образом, исходное выражение, если $x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right]$, будет равно

$$\frac{1}{\pi}\left(\arcsin x-\arcsin\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}.$$

Теорема. Если в каждой точке интервала $(a;\ b)$ функция $f(x)$ имеет равную нулю производную, то $f(x)\equiv C$ на $(a;\ b)$, где C - некоторая константа.

Замечание 3.2. Если дополнительно известно, что $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$ (или на одном из полуинтервалов $[a;\ b)$, $(a;\ b]$), то $f(x)\equiv C$ на $[a;\ b]$ (или соответственно на одном из полуинтервалов $[a;\ b)$, $(a;\ b]$).

Ответ: $0,25$.

5.2. Типовые индивидуальные задания

Задание 1. Доказать тождество $(x+b+c)^2+(-x+b+c)^2+(x-b+c)^2+(x+b-c)^2=4\left(x^2+b^2+c^2\right)$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x)=(x+b+c)^2+(-x+b+c)^2++(x-b+c)^2+(x+b-c)^2-4\left(x^2+b^2+c^2\right).$$

Эта функция определена при любых значениях x. Вычислим ее производную (по x):

$$f'(x)=2(x+b+c)-2(-x+b+c)+2(x-b+c)+2(x+b-c)-8x\equiv 0.$$

Поэтому $f(x)\equiv C=const$, но $C=f(0)=(b+c)^2+(b+c)^2+(c-b)^2+(b-c)^2-4\left(b^2+c^2\right)=0$.

Следовательно, $f(x)\equiv 0$, что равносильно исходному тождеству.

Задание 2. Доказать, что $|\alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta|\le 2|\alpha-\beta|$, если $0\le\alpha\le 1,\ 0\le\beta\le 1$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x\sin x$. Отметим, что эта функция строго возрастает на отрезке $[0,\ 1]$, так как является произведением двух строго возрастающих на этом промежутке функций. Тогда, если $\alpha<\beta$, то надо доказать, что $\beta\sin\beta-\alpha\sin\alpha\le 2(\beta-\alpha)$, а по теореме Лагранжа имеем

$$\beta\sin\beta-\alpha\sin\alpha=(\sin\gamma_1+\gamma_1\cos\gamma_1)(\beta-\alpha), \qquad (1.1)$$

где $\gamma_1\in(\alpha;\ \beta)$.

Если же $\beta<\alpha$, то доказать надо неравенство $\alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta\le 2(\alpha-\beta)$, и, снова используя теорему Лагранжа, получим

$$\alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta=(\sin\gamma_2+\gamma_2\cos\gamma_2)(\alpha-\beta), \qquad (1.2)$$

где $\gamma_2\in(\beta;\ \alpha)$.

Так как $\sin\gamma_i+\gamma_i\cos\gamma_i\le 2$ при $0<\gamma_i<1\ \ (i=1,\ 2)$, то из (1.1) и (1.2) получим требуемые неравенства

$$\alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta\le 2(\alpha-\beta),\ \ \beta\sin\beta-\alpha\sin\alpha\le 2(\beta-\alpha)$$

(равенство будем иметь, если $\alpha=\beta$). Неравенство доказано.

Задание 3. Доказать неравенство $x+\dfrac{x^3}{3}<tg\ x$, где $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Пусть $f(x)=x+\dfrac{x^3}{3},\ \ g(x)=tg\ x$. Тогда $f(0)=g(0)=0,\ f'(x)=1+x^2,\ \ g'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Неравенство $f'(x)<g'(x)$ равносильно неравенству $1+x^2<\dfrac{1}{\cos^2 x}$, которое выполняется, так как

$\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x>1+x^2$ (в силу неравенства $\sin x<x<tg\ x$ для всех $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$).

Итак, все условия теоремы * выполнены, следовательно, исходное неравенство справедливо.

Теорема *. Если функции f и g непрерывны на отрезке $[a;\ b]$ и имеют производные в интервале $(a;\ b)$, причем $f(a)\le g(a)$, $f'(x)<g'(x)$ для всех $x\in(a;\ b)$, то на $(a;\ b)$ выполняется неравенство $f(x)<g(x)$.

5.3. Типовая контрольная работа

1. Доказать, что $\left|\alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta\right|\le 2\left|\alpha-\beta\right|$, если $0\le\alpha\le1,\ \ 0\le\beta\le1$.

2. Доказать неравенство $x+\dfrac{x^3}{3}<tg\ x$, где $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

3. Вычислить: $\dfrac{1}{\pi}\left(\arcsin x-\arcsin\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)$, если $x\in\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right]$.

4. Решить уравнение $\left(4^x+2\right)\left(2-x\right)=6$.

5. Решить уравнение $x^3-7x^2+16x-12=0$.

6. Вычислить суммы

1) $\alpha_1=1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\ \ldots\ +\dfrac{n}{2^{n-1}}$;

2) $\alpha_2=1+2\cdot6+3\cdot6^2+4\cdot6^3+\ \ldots\ +100\cdot6^{99}$.

Ключ

№ задания	1	2	3	4	5	6
Ответ	Рассмотреть функцию $f(x)=x\sin x$, применить теорему Лагранжа	Рассмотреть функции $f(x)=x+\dfrac{x^3}{3}$, $g(x)=tg\ x$	$\dfrac{1}{4}$	$x_1=0$, $x_2=\dfrac{1}{2}$, $x_3=1$	$x_1=x_2=2$, $x_3=3$	$\alpha_1=4-2^{1-n}(n+2)$, $\alpha_2=\dfrac{1}{25}\left(499\cdot6^{100}+1\right)$

5.4. Вопросы к зачету

1. Теорема Лагранжа и следствия из нее. Применение к доказательству неравенств.
2. Теорема Ролля и следствия из нее. Применение к решению уравнений.
3. Доказательство тождеств с помощью производной.
4. Использование производной при доказательстве неравенств.
5. Использование выпуклости и вогнутости функций при доказательстве неравенств.
6. Неравенство Иенсена.
7. Алгебраические уравнения высших порядков.
8. Теорема Ферма.
9. Возрастание и убывание функций. Максимум и минимум.
10. Исследование функций на экстремум с помощью второй производной.
11. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
12. Выпуклость вверх и вниз графика функции. Точки перегиба.
13. Основные формулы комбинаторики.